

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ιανουάριος 2015

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

**Θέμα 1 :** Δίνεται η εξίσωση  $f(x) = e^x - 4x^2 = 0$ , η οποία έχει μια ρίζα  $x^* \in [0, 1]$ . Για την εύρεση της ρίζας αυτής προτείνονται οι αλγόριθμοι

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ και}$$

$$x_{n+1} = \log(4x_n^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Να αποδείξετε ότι ο πρώτος αλγόριθμος συγκλίνει στη ρίζα  $x^*$  για κάθε  $x_0$  που βρίσκεται στο διάστημα  $I = [0, 1]$ , ενώ ο δεύτερος αλγόριθμος δεν συγκλίνει.

**Θέμα 2 :** Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss ή με την LU ανάλυση. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)

**Θέμα 3 :** Να βρεθεί η συνάρτηση  $f$  όταν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου 5 και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα τιμών

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & -1 & 0 & 2 \\ \hline f(x_i) & 5 & 0 & 20 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας παρεμβολή.

**Θέμα 4 :** Δοθέντος ότι η συνάρτηση  $f$ , που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 2 \\ \hline f(x_i) & 2 & 4 & 0 & -2 \end{array},$$

είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων  $\int_{-2}^2 f(x) dx$  και  $\int_0^2 f(x) dx$ , χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, χωρίς να βρεθεί η  $f$ .